正の偶数に対するζ関数の値

Theorem. ζ 関数 $\zeta(s)$ を

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

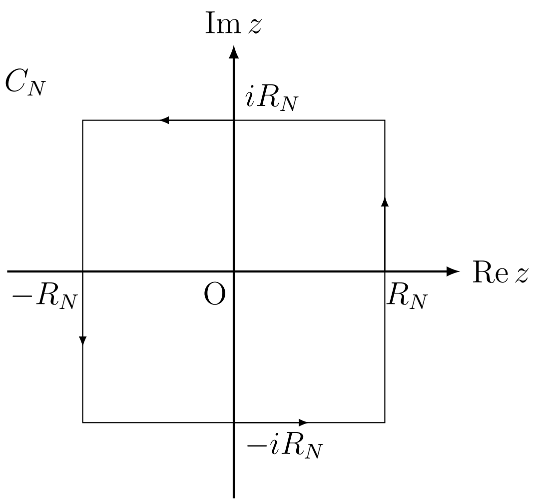
とするとき, $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!} \pi^{2m}$$

が成り立つ. ここで, B_m は Bernoulli 数である.

Proof. $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ は $z = 0$ のまわりで, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ と Laurent 展開できることに注意する. $n \geq 2$ に対して $f_n(z) = \dfrac{z}{e^z - 1} \cdot \dfrac{1}{z^{n+1}}$ とすると $f_n(z)$ の極は $z = 2l\pi i$ $(l \in \mathbb{Z})$ であり, $l \neq 0$ のときは $z = 2l\pi i$ は 1 位の極であり, $z = 0$ は $n+1$ 位の極である.

ここで, $N \in \mathbb{N}$ に対して以下の積分路 C_N に沿った $f_n(z)$ の積分を考える. ここで, $R_N = (2N+1)\pi$ である.



このとき留数定理より

$$\int_{C_N} f_n(z)\, dz = 2\pi i \sum_{l=-N}^{N} \mathrm{Res}\,(f_n; 2l\pi i) = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f_n; 0) + 2\pi i \sum_{0<|l|\leq N} \mathrm{Res}\,(f_n; 2l\pi i)$$

がなりたつ. ここで

$$\mathrm{Res}\,(f_n; 0) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^n}{dz^n} z^{n+1} f_n(z) = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} f^{(n)}(z) = \frac{B_n}{n!}$$

である. ただし最後の等号は $f(z)$ の Laurent 展開係数より成り立つことがわかる. また, $l \neq 0$ のとき

$$\mathrm{Res}\,(f_n; 2l\pi i) = \lim_{z \to 2l\pi i} \frac{z - 2l\pi i}{e^z - 1} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{(2l\pi i)^n}$$

であるから

$$\int_{C_N} f_n(z)\,dz = 2\pi i \left\{ \frac{B_n}{n!} + \sum_{0<|l|\leq N} \frac{1}{(2l\pi i)^n} \right\}$$

となる. ここで, n が奇数のときは右辺第二項が 0 になるから, n が正の偶数つまり $n = 2m$ $(m \in \mathbb{N})$ のときを考えると

$$\int_{C_N} f_{2m}(z)\,dz = 2\pi i \left\{ \frac{B_{2m}}{(2m)!} + 2\sum_{l=1}^{N} \frac{1}{(2l\pi)^{2m}(-1)^m} \right\}$$

のように書き直すことができる.

次に, $N \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_{C_N} f_{2m}(z)\,dz \to 0$ を示す. 三角不等式から

$$\left| \int_{C_N} f_{2m}(z)\,dz \right| \leq \int_{C_N} |f_{2m}(z)|\,|dz| \leq \sup_{z \in C_N} |f_{2m}(z)| \cdot 4(2N+1)\pi$$

がわかる. 正方形状の C_N を各辺に分解して $\displaystyle\sup_{z \in C_N} |f_{2m}(z)|$ を評価する.

(i) $z = R_N + ti$ $(-R_N \leq t \leq R_N)$ のとき, ある定数 $M_1 > 0$ に対して

$$|f_{2m}(z)| \leq \frac{1}{|z|^{2m}} \frac{1}{|e^z - 1|} \leq \frac{1}{(R_N)^{2m}} \frac{1}{e^{R_N} - 1} \leq \frac{M_1}{N^{2m}}$$

が成り立つ.

(ii) $z = -R_N + ti$ $(-R_N \leq t \leq R_N)$ のとき, ある定数 $M_2 > 0$ に対して

$$|f_{2m}(z)| \leq \frac{1}{|z|^{2m}} \frac{1}{|e^z - 1|} \leq \frac{1}{(R_N)^{2m}} \frac{1}{1 - e^{-R_N}} \leq \frac{M_2}{N^{2m}}$$

が成り立つ.

(iii) $z = t \pm R_N i$ $(-R_N \leq t \leq R_N)$ のとき, ある定数 $M_3 > 0$ に対して

$$|f_{2m}(z)| \leq \frac{1}{|z|^{2m}} \frac{1}{|e^z - 1|} \leq \frac{1}{(R_N)^{2m}} \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{(R_N)^{2m}} \frac{1}{e^{-R_N} + 1} \leq \frac{M_3}{N^{2m}}$$

が成り立つ.

(i) から (iii) より $\displaystyle\sup_{z \in C_N} |f_{2m}(z)| \leq \frac{M}{N^{2m}}$ $(M > 0)$ が成り立つことがわかる.

ゆえに

$$\lim_{N \to \infty} \left| \int_{C_N} f_{2m}(z)\,dz \right| \leq \lim_{N \to \infty} \frac{4M(2N+1)\pi}{N^{2m}} = 0$$

となるから, $N \to \infty$ とすると

$$\frac{B_{2m}}{(2m)!} + 2\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l\pi)^{2m}(-1)^m} = 0$$

が成り立ち, これを $\zeta(2m)$ について解くと

$$\zeta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1} B_{2m}}{(2m)!} \pi^{2m}$$

となる. ■